Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа № 17»

| | | |
|---|---|---|
| ***Рассмотрено*** | ***Согласовано*** | ***Утверждаю*** |
| на заседании ШМО | Заместитель директора | Директор МБОУ «СОШ №17» |
| протокол № 1 | _____ | _____ И. Ю. Буденная |
| от 31.08.2015 | | |
| Руководитель ШМО: | С. Н. Виданова | Приказ № 168 от 01.09. 2015 г. |
| _____ | | |

Рабочая программа элективного курса

«Математические расчеты на каждый день»

7 класс

Разработала: Клименко Н.М.

первая квалификационная категория

г. Усть - Илимск

## Пояснительная записка

Программа элективного курса по математике «**математические расчеты на каждый день»** рассчитана на 34 часа для учащихся 7 классов в рамках предпрофильной подготовки. Она состоит из двух взаимосвязанных частей: I – приемы быстрого счеты и II – процентные расчеты на каждый день.

Работая в классах на старшей ступени, учителя сталкиваются с проблемой отсутствия хороших навыков устного и быстрого счёта у многих старшеклассников. Лишь единицы умеют быстро и безошибочно производить вычислительные действия над числами. Это умение порой не зависит от профиля класса, в котором обучается ребёнок. Данная проблема говорит о низкой общематематической культуре учащихся, об отсутствии у них элементарных знаний арифметики. Причины такого положения заключаются в следующем:

1) отсутствие у школьников прочных знаний об общих свойствах и закономерностях чисел, о законах, которым подчиняются операции над числами;

2) незнание учащимися основных приёмов быстрого счёта, их неумение применять рациональные приёмы вычислений и тождественных преобразований;

3) их желание прибегнуть к помощи микрокалькулятора при сложных вычислениях, ведь считать «вручную» на бумаге или тем более в уме – дело кропотливое и к тому же весьма ненадёжное.

Однако использование калькуляторов на экзаменах запрещено, да и время для решения теста ограничено. К государственному экзамену надо готовить учащихся заранее, начиная с 5-х классов, чтобы они бегло и уверенно выполняли все математические действия, свободно владели техникой рациональных вычислений. Малая скорость вычислений есть следствие хаоса в голове ученика, неупорядоченности его элементарных умений. Скорость вычислений можно увеличить лишь путём проведения упражнений направленных на упорядочение мыслительных операций при вычислениях.

«Приёмы быстрого счёта» - актуальная тема для учащихся, занимающихся в классах любого профиля, так как хорошие вычислительные навыки необходимы и в практической деятельности, и для изучения смежных дисциплин, и для продолжения образования. А процентные расчеты включены в материалы итоговой аттестации за курс основной школы, в КИМы и ЕГЭ, в конкурсные экзамены. Проведение данного курса обусловлено непродолжительным изучением темы «Проценты» на первом этапе основной школы, когда учащиеся в силу возрастных особенностей еще не могут получить полноценные представлении о процентах, об их роли в повседневной жизни. На последующих этапах обучения повторного обращения к этой теме не предусматривается. Во многих школьных учебниках можно встретить задачи на проценты, однако в них отсутствует компактное и четкое изложение соответствующей теории вопроса. Однако практика показывает, что задачи на проценты вызывают затруднения у учащихся и очень многие окончившие школу не имеют прочных навыков обращения с процентами в повседневной жизни. Понимание процентов и умение производить процентные расчеты в настоящее время необходимы каждому человеку: прикладное значение этой темы очень велико и затрагивает финансовую, демографическую, экологическую, социологическую и другие стороны нашей жизни. Предлагаемый курс сейчас весьма актуален, ибо понятие «кредит» (будь то ипотека или автокредит) прочно вошло в жизнь современного человека. Люди берут банковские кредиты и, как правило, не могут правильно рассчитать процентные выплаты.

Данный курс «Математические расчеты на каждый день» демонстрирует учащимся применение математического аппарата к решению повседневных бытовых проблем каждого человека, вопросов рыночной экономики и задач технологии производства; ориентирует учащихся на обучение по естественно-научному и социально-экономическому профилю. Познавательный материал курса будет способствовать не только выработке умений и закреплению навыков процентных вычислений, но и формированию устойчивого интереса учащихся к процессу и содержанию деятельности, а также познавательной и социальной активности.

**Цели курса:**

- научить семиклассников различным приёмам быстрого счёта, систематизировать полученные ранее знания для успешного выполнения вычислительных задач.

- сформировать понимание необходимости знаний процентных вычислений для решения большого круга задач, показав широту применения процентных расчетов в реальной жизни;
- способствовать интеллектуальному развитию учащихся, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в современном обществе, для общей социальной ориентации и решения практических проблем;
- создать возможность для учащихся реализовать свой интерес к математике.

**Задачи курса:**

- - систематизировать и углубить знания учащихся, полученные за период с 5 по 7-е классы, связанные с рациональными вычислениями и преобразованиями;
- сформировать умения производить процентные вычисления, необходимые для применения в практической деятельности;
- обучить решению основных задач на проценты с применением формул простого процентного роста и сложного процентного роста;
- привить учащимся основы экономической грамотности;
- - обогатить учащихся новыми математическими средствами и методами при решении нестандартных вычислительных задач,
- - развивать и поддерживать интерес к математике,
- - воспитывать у учащихся творческую активность и чувство личной ответственности.

**Предполагаемый результат:**

- У школьников сформировано понимание необходимости знаний процентных вычислений.
- Сформирована необходимость применения приемов быстрого счета при решении задач.
- Сформированы умения производить процентные вычисления, необходимые для применения в практической деятельности.
- Учащимся привиты первоначальные основы экономической грамотности.
- Ученик способен оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы.

**Методические рекомендации:**

Iраздел:
Часть 1. Теоретический и исторический аспект понятия «арифметика».
Часть 2. Приёмы быстрого счёта;
Часть 3. Вычислительная арифметика.

Первая часть начинается с небольшого исторического экскурса. Именно на первых занятиях факультатива необходимо показать учащимся важность арифметики в познании мира, её значимость в развитии математики, её сложность и увлекательность. Чтобы вызвать интерес и творческую активность учащихся, можно предложить им на первом занятии домашнее задание: подготовить небольшое сообщение или презентацию темы, связанной с развитием науки о числе в разных странах. На эту работу можно не ограничивать время. Самое главное, чтобы сообщение прозвучало до окончания факультативных занятий по данной теме. По мере поступления сообщений или новых интересных фактов истории арифметики, можно заслушивать их в начале каждого занятия.

Со второго занятия рассматриваются приёмы быстрого счёта, которые представлены во второй части. Желательно не демонстрировать учащимся сразу обоснования новых методов, давая возможность им самим найти собственный метод рациональных вычислений или объяснение того или иного приёма. После обсуждения и анализа всех предложенных способов, можно записать наиболее рациональный способ решения или обоснование нового предложенного метода. Затем следует закрепить новые навыки с помощью несложных вычислительных упражнений, в которых ярко прослеживается данный метод.

В третье части представлен набор вычислительных задач, с помощью которых можно проверить практический эффект приобретённых на факультативе и на уроках знаний. В основном эти задания выполняются самостоятельно, со следующей самопроверкой ответов.

Ответы находятся у учителя. Учитель контролирует, как учащиеся применяют рациональные способы вычислений, корректирует их решения и помогает уточнять проблемы, над которыми следует поработать персонально каждому ученику для достижения большей результативности.

Каждое занятие желательно планировать на два урока. На первом уроке рассматривались новые приёмы из 2 части, их теоретическое обоснование и отработка новых знаний, а на втором уроке учащимся предлагались практические задания из 3 части. Таким образом, первую половину занятия учащиеся осуществляют поиск новых методов, доказывают их надёжность в применении, прогнозируют результат, выдвигают гипотезы, т. е. совместно занимаются творческим поиском. А вторую половину занятия идёт индивидуальная работа и проверка собственных знаний на прочность.

На последнем занятии целесообразно провести диагностический тест для самоконтроля по рассматриваемой теме с последующим анализом допущенных ошибок. Тест составлен таким образом, что применение приёмов быстрого счёта в каждом задании значительно сокращает время работы с тестом. Поэтому желательно провести этот тест на время (60 минут). Если при этом окажется, что ученик верно решил не менее 20 заданий из 30, то можно считать данную тему усвоенной учеником.

II часть:

В теоретическом плане методы решения основных задач на проценты представляют собой самостоятельный, в определенном плане даже изолированный, фрагмент математической теории, причем сложность чисто математических конструкций, лежащих в его основе, невелика. Представленные в данном курсе задачи часто могут быть решены разными способами.

Важно, чтобы каждый ученик самостоятельно выбрал свой способ решения, наиболее ему удобный и понятный. В ходе обучения полезно позаботиться о том, чтобы у учащихся остался наиболее яркий и положительно окрашенный след от работы с процентами: материал, изученный в 5 классе, в последующие годы легко забывается, и даже простые практические задачи на проценты начинают вызывать серьезные затруднения. Объявляя учащимся цель курса, полезно подчеркнуть, что сюжеты задач непосредственно взяты из действительности, окружающей современного человека - финансовая сфера (платежи, налоги, прибыли), демография, экология, социологические опросы и т. д.

При решении задач предполагается использование калькулятора - всюду, где это целесообразно. Применение калькулятора снимает непринципиальные технические трудности, позволяет разобрать больше задач. Однако в ряде случаев необходимо считать устно. Устный счет приучает к рациональным вычислениям, помогает сопоставлять, сравнивать показатели, прикидывать в уме результаты действий. В повседневной жизни умение считать быстро очень важно, для этого полезно знать некоторые факты. Например: чтобы увеличить величину на 50 %, достаточно прибавить ее половину; чтобы найти 20 % величины, надо найти ее пятую часть; что 40 % некоторой величины в 4 раза больше, чем ее 10 %; что треть величины - это примерно 33%.

На уроках можно использовать фронтальный опрос, который охватывает большую часть учащихся класса. Эта форма работы развивает точную, лаконичную речь, способность работать в скором темпе, быстро собираться с мыслями и принимать решения.

Можно рекомендовать комментированные упражнения, когда один из учеников объясняет вслух ход выполнения задания. Эта форма помогает учителю «опережать» возможные ошибки. При этом нет механического списывания с доски, а имеет место процесс повторения. Сильному ученику комментирование не мешает, среднему - придает уверенность, а слабому - помогает. Ученики приучаются к вниманию, сосредоточенности в работе, к быстрой ориентации в материале.

Поурочные домашние задания являются обязательными для всех. Активным учащимся можно давать задания из дополнительной части. Проверка заданий для самостоятельного решения осуществляется на занятии путем узнавания способа действия и называния ответа. Программа может быть эффективно использована в 7-9 классах с любой степенью подготовленности, способствует развитию познавательных интересов, экономической грамотности, мышления учащихся, предоставляет возможность подготовиться к сознательному выбору профиля обучения и дальнейшей специализации. Минимальные требования к оснащению учебного процесса: раздаточный материал для проведения практических работ.

## Содержание изучаемого курса

### Часть 1.Теоретический и исторический аспекты понятия «арифметика»

С арифметики, науки о числе, начинается наше знакомство с математикой. Один из первых русских учебников арифметики, написанный Л.Ф.Магницким в 1703 году, начинался словами: «Арифметика или числительница, есть художество честное, независтное, и всем удобнопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретённое и изложенное». С арифметикой мы входим, как говорил М.В.Ломоносов, во «врата учёности» и начинаем наш долгий и нелёгкий, но увлекательный путь познания мира.

Слово «арифметика» происходит от греческого *arithmos* $(\alpha\rho\iota\sigma\theta\mu o\varsigma)$, что значит «число». Эта наука изучает действия над числами, различные правила обращения с ними, учит решать задачи, сводящиеся к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел. Часто представляют себе арифметику как некоторую первую ступень математики, основываясь на которой можно изучать более сложные её разделы – алгебру математический анализ и т.д. Даже целые числа – основной объект арифметики – относят, когда рассматривают их общие свойства и закономерности, к высшей арифметике, или теории чисел.

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: в Вавилоне, Китае, Индии, Египте. Например, египетский папирус Ринда относится к XX в. до н. э. Среди прочих сведений он содержит разложения дроби на сумму дробей с числителем, равным единице.

Например: $\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$.

Найти такие разложения не легко и в наши дни.

Накопленные в странах Древнего Востока сокровища математических знаний были развиты и продолжены учёными Древней Греции. Много имён учёных, занимавшихся арифметикой в античном мире, сохранила нам история – Анаксагор и Зенон, Евклид и Архимед, Эратосфен и Диофант. Яркой звездой сверкает здесь имя Пифагора (VI в. до н. э.). Пифагорейцы преклонялись перед числами, считая, что в них заключена вся гармония мира.

В средние века развитие арифметики также связано с Востоком: Индией, странами арабского мира и Средней Азии. От индийцев пришли к нам цифры, которыми мы пользуемся, нуль и позиционная система счисления; от аль-Каши (XV в.), работавшего в Самаркандской обсерватории Улугбека, - десятичные дроби.

Благодаря развитию торговли и влиянию восточной культуры начиная с XIII в. повышается интерес к арифметике и в Европе. Следует вспомнить имя итальянского учёного Леонардо Пизанского (Фибоначчи), сочинение которого «Книга абака» знакомило европейцев с основными достижениями математики Востока и явилось началом многих исследований в арифметике и алгебре.

Примерно с XVI в. развитие чисто арифметических вопросов влилось в русло алгебры. В качестве значительной вехи можно отметить появление работ учёного из Франции Ф.Виета, в которых числа обозначены буквами. Начиная с этого времени основные арифметические правила осознаются уже окончательно с позиции алгебры. «Высшие» вопросы арифметики становятся достоянием теории чисел.

Основной объект арифметики – число. Развитие понятия числа – появление нуля и отрицательных чисел, обыкновенных и десятичных дробей, способы записи чисел – всё это имеет богатую и интересную историю. В арифметике числа складывают, вычитают, умножают и делят. Искусство быстро и безошибочно производить эти действия над любыми числами долгое время считалось важнейшей задачей арифметики. Сейчас мы всё чаще и чаще поручаем сложную вычислительную работу микрокалькуляторам, которые постепенно пришли на смену таким устройствам, как счёты, арифмометр, логарифмическая линейка. Однако в основе работы всех вычислительных машин – простых и сложных – лежит самая простая операция – сложение натуральных чисел. Оказывается, самые сложные расчёты можно свести к сложению, только делать эту операцию надо многие миллионы раз.

Арифметические действия над числами имеют самые различные свойства. Эти свойства можно описать словами, можно записать буквами, можно выразить специальными терминами. В XIX в. математика сделала важный шаг – она стала систематически складывать и умножать

не только числа, но и векторы, функции, перемещения, таблицы чисел, матрицы и многое другое, не очень заботясь об их конкретном смысле. И вот здесь оказалось, что самым важным является то, каким законам подчиняются эти операции.

Среди важных понятий, которые ввела арифметика, надо отметить *пропорции* и *проценты.* Большинство понятий и методов арифметики основано на сравнении различных зависимостей между числами.

Арифметика теснейшим образом связана и с алгеброй, и с геометрией, и с другими разделами математики. Как же очертить границы самой арифметики? В каком смысле употребляется это слово?

Под словом «арифметика» можно понимать:

~ *учебный предмет,* занимающийся преимущественно рациональными числами, действиями над ними и задачами, решаемыми с помощью этих действий;

~ *часть истории математики,* накопившую различные сведения о вычислениях:

~ *«теоретическую арифметику»* - часть современной математики, занимающуюся конструированием различных числовых систем (натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа и их обобщения);

~ *«формальную арифметику»* - часть математической логики, занимающуюся анализом аксиоматической теории арифметики;

~ *«высшую арифметику»*, или теорию чисел, самостоятельно развивающуюся часть математики.

**Часть 2. Приёмы быстрого счёта.**

2.1. Умножение и деление на числа, близкие к «круглым»

**Задача 1. Умножение на 9 с помощью пальцев**

Этот способ настолько прост, что его может освоить любой ребёнок, знакомый лишь с элементарным счётом. Пусть нужно умножить 7 на 9. Положив обе руки на стол, приподнимаем седьмой палец, считая слева направо. Тогда количество пальцев слева от поднятого укажет цифру десятков (в нашем случае 6), а количество пальцев справа от поднятого укажет цифру единиц (равную 3), т. е. искомое произведение будет равно 63.

Объясните, почему предложенный способ даёт правильный ответ при умножении любого однозначного числа на 9.

**<u>Решение.</u>** При умножении однозначного числа *a* на *9* предложенным способом мы получаем, что слева от *a*-го (поднятого) пальца находится *a-1* пальцев, а справа *10-a* пальцев, т. е. искомое произведение равно

$10(a-1)+(10-a)=10a-10+10-a=9a,$ что и требовалось объяснить.

**Задача 2. Вычитание вместо умножения**

Умножение некоторого числа на 9 можно свести к вычитанию двух чисел. Подумайте, каких. Предложите аналогичный способ умножения чисел на 99, на 999, на числа, близкие к числам 10, 100, 1000 и т. д.

**<u>Решение.</u>** Так как $9a = 10a - a$, то для умножения числа *a* на *9* достаточно от увеличенного в *10* раз числа *a* отнять само число *a*. Например, при $a = 584$ имеем $584 \cdot 9 = 5840 - 584 = 5256$.

Аналогично вместо умножения числа *a* на 99 или 999 можно умножить его на 100 или 1000 соответственно, а потом отнять само число *a*, т. е.

$99a = 100a - a, \quad 999a = 1000a - a$ и т. д.

Например,
$$584 \cdot 99 = 58400 - 584 = 57816$$
$$584 \cdot 999 = 584000 - 584 = 583416.$$

В общем случае умножения на числа, близкие к степени десятки, поступаем аналогично.

Например,
$$584 \cdot 997 = 584 \cdot (1000 - 3) = 584000 - 1752 = 582248$$
$$245 \cdot 98 = 245 \cdot (100 - 2) = 24500 - 490 = 24010$$
$$63 \cdot 89 = 63 \cdot (100 - 11) = 6300 - 63 \cdot 11 = 6300 - 693 = 5607$$

**Задача 3. Умножение на 11**

Докажите, что для умножения двузначного числа на 11, достаточно между цифрой десятков и цифрой единиц данного числа вписать число, равное сумме цифр этого числа.

Например, пользуясь указанным способом, находим произведения $53 \cdot 11 = 583$, где $8 = 5 + 3$;
$72 \cdot 11 = 792$, где $9 = 7 + 2$.

**Решение.** Пусть данное двузначное число имеет вид *10 a + b*. Правильность предложенного способа вытекает из следующих равенств:

$$(10a + b) \cdot 11 = 110a + 11b = 100a + 10a + 10b + b = 100a + 10(a + b) + b$$

Например, $53 \cdot 11 = 3 \cdot 100 + (3 + 5) \cdot 10 + 5 = 300 + 80 + 5 = 385$,

$81 \cdot 11 = 800 + 90 + 1 = 891$,

$87 \cdot 11 = 800 + 150 + 7 = 957$,

$93 \cdot 11 = 900 + 120 + 3 = 1023$.

**Задача 4. Быстрое деление**

Деление числа 63475 на 999 было произведено следующим образом:

$$63475 = 63 \cdot 1000 + 475 = 63 \cdot 999 + 63 + 475 = 63 \cdot 999 + 538,$$

откуда частное равно 63, а остаток 538. Используя аналогичные преобразования, разделите число 63475 с остатком на 99, на 98, на 102.

**Решение.** Так как

$$63475 = 634 \cdot 100 + 75 = 634 \cdot 99 + 634 + 75 = 634 \cdot 99 + 6 \cdot 100 + 34 + 75 = \\ = 634 \cdot 99 + 6 \cdot 99 + 6 + 34 + 75 = 640 \cdot 99 + 115 = 641 \cdot 99 + 16,$$

то частное от деления данного числа на 99 равно 641, а остаток 16. Так как

$$63475 = 634 \cdot 98 + 634 \cdot 2 + 75 = 634 \cdot 98 + 6 \cdot 98 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 2 + 34 \cdot 2 + 75 = \\ = 646 \cdot 98 + 24 + 68 + 75 = 647 \cdot 98 + 69,$$

то частное от деления данного числа на 98 равно 647, а остаток 69. Так как

$$63475 = 634 \cdot 102 - 634 \cdot 2 + 75 = 634 \cdot 102 - 6 \cdot 102 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 2 - 34 \cdot 2 + 75 = \\ = 622 \cdot 102 + 24 - 68 + 75 = 622 \cdot 102 + 31,$$

то частное от деления на 102 равно 622, а остаток 31.

## 2.2. Применение основных свойств действий

Для успешного проведения вычислительных операций необходимы прочные знания элементарных свойств действий над числами. Эти свойства желательно уметь описывать словами, записывать в виде формул и видеть их в вычислительных преобразованиях.

1. Переместительные свойства сложения и умножения:
   $a + b = b + a$ $\qquad a \cdot b = b \cdot a$
2. Сочетательные свойства сложения и умножения:
   $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Распределительное свойство умножения относительно сложения:
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Свойства нуля и единицы:
   $a + 0 = 0 + a = a$ $\qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ $\qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

**Упражнения**

1. Вычислить устно

а) $6{,}64 + 7{,}12 + 2{,}88$ $\qquad [16{,}64]$

б) $7{,}15 - 9{,}42 + 12{,}85 - 0{,}58$ $\qquad [10]$

в) $18{,}9 - 6{,}8 - 5{,}2 - 4{,}1$ $\qquad [2{,}8]$

г) $-75{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 20$ $\qquad [-757]$

д) $50 \cdot 1{,}34 \cdot 0{,}2$ $\qquad [13{,}4]$

е) $0{,}47 \cdot 0{,}4 \cdot 25$ $\qquad [4{,}7]$

ж) $15{,}7 \cdot 3{,}09 + 15{,}7 \cdot 2{,}91$ $\qquad [94{,}2]$

з) $4{,}03 \cdot 27{,}9 - 17{,}9 \cdot 4{,}03$ $\qquad [40{,}3]$

2. Вычислить наиболее рациональным способом

а) $54 \cdot 36 - 42 \cdot 54 + 6 \cdot 74$ $\qquad [120]$

б) $478\cdot 62+13\cdot 478-75\cdot 678$ $[-15000]$

в) $3{,}7\cdot 8{,}3+8{,}3\cdot 6{,}3-3{,}7\cdot 6{,}3-6{,}3^2$ $[20]$

г) $7{,}2\cdot 5{,}8-7{,}2\cdot 2{,}8+5{,}8\cdot 2{,}8-2{,}8^2$ $[30]$

д) $\dfrac{0{,}2\cdot(1{,}9\cdot 0{,}5)\cdot 10}{(0{,}25\cdot 8\cdot 4)\cdot 0{,}125}$ $[1{,}9]$

е) $\dfrac{0{,}6\cdot(1{,}8\cdot 0{,}5)10}{(0{,}25\cdot 8\cdot 4)\cdot 0{,}325}$ $[1{,}8]$

ж) $\dfrac{6{,}1\cdot 3{,}9-6{,}1\cdot 1{,}9-0{,}4\cdot 3{,}9+0{,}4\cdot 1{,}9}{8{,}9\cdot 1{,}7-3{,}2\cdot 2{,}3+8{,}9\cdot 2{,}3-3{,}2\cdot 1{,}7}$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

## 2.3. Умножение и деление на степень пятёрки и степень двойки

**Задача 1. Умножение и деление на 5**

Трудно не согласиться с тем, что разделить произвольное число на 2 в уме легче, чем умножить его на 5. Нельзя ли воспользоваться этим обстоятельством, чтобы облегчить умножение чисел на 5? Что вы можете предложить вместо деления на 5?

**Решение.** Вместо умножения числа $a$ на 5 можно, и это действительно проще, разделить его на 2 и умножить на 10, поскольку $5a=a\cdot\dfrac{10}{2}=\dfrac{10a}{2}=\dfrac{a}{2}\cdot 10$. Например, $1275\cdot 5=637{,}5\cdot 10=6375$,

$$49\cdot 5=24{,}5\cdot 10=245$$

$$426\cdot 5=213\cdot 10=2130$$

Аналогично вместо деления числа $a$ на 5 можно, наоборот, умножить его на 2 и разделить на 10, поскольку $\dfrac{a}{5}=\dfrac{2a}{10}$.

Например,

$$49:5=98:10=9{,}8$$

$$426:5=852:10=85{,}2$$

$$1275:5=2550:10=255$$

**Задача 2. Умножение и деление на степень пятёрки**

Аналогично умножению или делению на 5 можно сравнительно легко в уме умножать или делить числа на 25 и на 125. Как именно?

**Решение.** Так как $25=\dfrac{100}{4}$, то справедливы формулы

$25a=\dfrac{100a}{4}$ и $\dfrac{a}{25}=\dfrac{4a}{100}$.

Пользуясь этими формулами, получаем

$36\cdot 25=3600:4=900$ $\qquad$ $60:25=0{,}6\cdot 4=2{,}4$

$328\cdot 25=32800:4=8200$ $\qquad$ $13:25=0{,}13\cdot 4=0{,}52$

$786\cdot 25=78600:4=19650$ $\qquad$ $527:25=5{,}27\cdot 4=21{,}08$

Что же касается умножения и деления на 125, то здесь аналогично получаем формулы $125a=\dfrac{1000a}{8}$ и $\dfrac{a}{125}=\dfrac{8a}{1000}$.

Например,

$56\cdot 125=56000:8=7000$ $\qquad$ $130:125=0{,}13\cdot 8=1{,}04$

$96\cdot 125=96000:8=12000$ $\qquad$ $234:125=0{,}234\cdot 8=1{,}872$

$184\cdot 125=184000:8=23000$ $\qquad$ $12:125=0{,}012\cdot 8=0{,}096$

**Задача 3. Способ удвоения**

При умножении чисел на степень двойки иногда используется способ, суть которого можно продемонстрировать на следующем примере:

$139 \cdot 32 = 278 \cdot 16 = 556 \cdot 8 = 1112 \cdot 4 = 2224 \cdot 2 = 4448$.

Как видоизменить этот способ для умножения на число, близкое к степени двойки, скажем на 14 или 35?

**<u>Решение.</u>** При последовательном умножении числа на возрастающие степени двойки, т. е. при последовательном удвоении, можно фиксировать те числа, сумма или разность которых даёт искомое произведение. Так, умножение числа 139 на $14 = 2^4 - 2^1$ можно провести следующим образом:

$139 \cdot 14 = 139 \cdot 2^4 - 139 \cdot 2^1 = 2224 - 278 = 1946$.

Аналогично умножение на $35 = 2^6 + 2^1 + 2^0$ можно провести так:

$139 \cdot 35 = 139 \cdot 2^6 + 139 \cdot 2^1 + 139 \cdot 2^0 = 4448 + 278 + 139 = 4865$.

Деление на степень двойки можно провести в такой же последовательности, как умножение, но, естественно, с заменой операции умножения операцией деления, например,

$140 : 32 = 70 : 16 = 35 : 8 = 17{,}5 : 4 = 8{,}75 : 2 = 4{,}375$.

2.4. Умножение и деление на 2,5, на 1,25, на 1,5 и на 0,75 с помощью обыкновенных дробей

**Задача 1. С помощью обыкновенных дробей**

Предложите способы быстрого умножения на 2,5, на 1,25, на 1,5 и на 0,75, использующие представление десятичных дробей в виде обыкновенных.

**<u>Решение.</u>** Учитывая равенства $2{,}5 = \frac{10}{4}$, $1{,}25 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{10}{8}$, $1{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$, $0{,}75 = 1 - \frac{1}{4}$, мы можем умножение произвольного числа $a$ на 2,5 заменить делением удесятерённого числа на 4, умножение на 1,25 – прибавлением четверти числа или делением удесятерённого числа на 8, умножением на 1,5 – прибавлением половины числа, умножение на 0,75 – вычитанием четверти числа. Следовательно, справедливы формулы:

$$a \cdot 2{,}5 = \frac{10}{4}, \quad a \cdot 1{,}25 = a + \frac{a}{4} = \frac{10 \cdot a}{8}, \quad a \cdot 1{,}5 = a + \frac{a}{2}, \quad a \cdot 0{,}75 = a - \frac{a}{4}.$$

Например,

| | |
|---|---|
| $248 \cdot 2{,}5 = 2480 : 4 = 620$ | $179 \cdot 2{,}5 = 1790 : 4 = 447{,}5$ |
| $248 \cdot 1{,}25 = 248 + 62 = 310$ | $179 \cdot 1{,}25 = 179 + 179 : 4 = 179 + 44{,}75 = 223{,}5$ |
| $248 \cdot 1{,}25 = 2480 : 8 = 310$ | $179 \cdot 1{,}25 = 1790 : 8 = 223{,}75$ |
| $248 \cdot 1{,}5 = 248 + 124 = 372$ | $179 \cdot 1{,}5 = 179 + 179 : 2 = 179 + 89{,}5 = 268{,}5$ |
| $248 \cdot 0{,}75 = 248 - 62 = 186$ | $179 \cdot 0{,}75 = 179 - 179 : 4 = 179 - 44{,}75 = 134{,}25$ |

**Задача 2. Умножение на 15 и на 75**

Используя решение предыдущей задачи, предложите способы быстрого умножения на 15 и 75.

**<u>Решение.</u>** Так как $15 = 1{,}5 \cdot 10 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 10$ и $75 = 0{,}75 \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 100$, то справедливы формулы: $a \cdot 15 = \left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot 10$ и $a \cdot 75 = \left(a - \frac{a}{4}\right) \cdot 100$.

Например,

| | |
|---|---|
| $34 \cdot 15 = (34 + 17) \cdot 10 = 510$ | $128 \cdot 15 = (128 + 64) \cdot 10 = 1920$ |
| $34 \cdot 75 = (34 - 8{,}5) \cdot 100 = 2550$ | $128 \cdot 75 = (128 - 32) \cdot 100 = 9600$ |

**Задача 3. Деление на 2,5, на 1,25, на 1,5 и на 0,75.**

Предложите способы быстрого деления на 2,5, на 1,25, на 1,5 и на 0,75 с помощью обыкновенных дробей.

**Решение.**

$$a:2{,}5=\frac{a}{2{,}5}=\frac{4a}{10},\qquad a:1{,}5=a:\frac{3}{2}=\frac{2a}{3},$$

$$a:1{,}25=\frac{a}{1{,}25}=\frac{8a}{10},\qquad a:0{,}75=a:\frac{3}{4}=\frac{4a}{3}.$$

Например,

$7:2{,}5=28:10=2{,}8$ $\qquad$ $96:1{,}5=96:3\cdot 2=32\cdot 2=64$

$43:2{,}5=172:10=17{,}2$ $\qquad$ $123:1{,}5=123:3\cdot 2=41\cdot 2=82$

$9:1{,}25=72:10=7{,}2$ $\qquad$ $4{,}8:0{,}75=4{,}8:3\cdot 2=1{,}6\cdot 2=3{,}2$

$13:1{,}25=104:10=10{,}4$ $\qquad$ $51:0{,}75=51:3\cdot 2=17\cdot 2=34$

2.5. Приёмы быстрого счёта с дробями

**Пример 1.** Вычислить $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$.

Заметим, что $\frac{1}{20}=\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{30}=\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{42}=\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$ и т. д.

Следовательно,

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

**Пример 2.** Вычислить $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}$.

Так как $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=\frac{3}{40}$, $\frac{1}{8}-\frac{1}{11}=\frac{3}{88}$, $\frac{1}{11}-\frac{1}{14}=\frac{3}{154}$, $\frac{1}{14}-\frac{1}{17}=\frac{3}{228}$, то

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{15}{34}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{34}$$

**Упражнения**

Вычислить наиболее рациональным способом

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$ $\qquad\left[\frac{9}{10}\right]$

2) $\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 14}+\ldots+\frac{1}{45\cdot 46}$ $\qquad\left[\frac{35}{506}\right]$

3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 16}$ $\qquad\left[\frac{5}{16}\right]$

4) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{69\cdot 73}$ $\qquad\left[\frac{35}{438}\right]$

5) $\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 13}+\ldots+\frac{4}{59\cdot 61}$ $\qquad\left[\frac{112}{305}\right]$

6) $\frac{7^2}{2\cdot 9}+\frac{7^2}{9\cdot 16}+\frac{7^2}{16\cdot 23}+\ldots+\frac{7^2}{65\cdot 72}$ $\qquad\left[\frac{245}{72}=3\frac{29}{72}\right]$

2.6. Нахождение значений выражений, содержащих степень

Программой по математике для 7-х классов предусмотрено изучение степени с натуральным показателем. Учащимся впервые на уроках даётся точное определение степени с натуральным показателем и её свойства. Работая над вычислительными примерами, содержащими степень, учащиеся имеют возможность более глубоко и осознанно разобраться в этой теме. Практика показывает, что полезно и на факультативном занятии ещё раз повторить и записать определение и свойства степени с натуральным показателем.

Определение: Степенью числа *a* с натуральным показателем *n,* большим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*, т. е.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ n раз}$$

Число *a* называется основанием, *n* – показателем степени. Первой степенью числа *a* называется само это число, т. е. $a^1 = a.$

Непосредственно из определения степени следуют основные свойства степеней с натуральными показателями: степень положительного числа с любым $n \in N$ положительна; степень отрицательного числа с чётным показателем положительна, с нечётным – отрицательна.

Действия со степенями производятся по следующим правилам:

1. Чтобы перемножить степени с одинаковыми основаниями, нужно показатели степеней сложить, а основание оставить прежним, т. е. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. Чтобы разделить степени с одинаковыми основаниями, нужно из показателя делимого вычесть показатель делителя, а основание оставить прежним, т. е. при $m \geq n$ и $a \neq 0$ $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. Чтобы возвести степень в степень, нужно перемножить показатели степеней, оставив основание прежним, т. е. $\left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$
4. Чтобы возвести произведение в степень, нужно в эту степень возвести каждый множитель, т. е. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. Чтобы возвести дробь в степень, нужно в эту степень возвести числитель и знаменатель дроби, т. е. при $b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

**Пример 1.** Вычислить значение выражения:

а) $\left(2\frac{2}{7}\right)^{17} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^{17} = \left(\frac{16}{7} \cdot \frac{7}{16}\right)^{17} = 1$

б) $\frac{20^{10}}{5^{10} \cdot 2^{19}} = \frac{2^{20} \cdot 5^{10}}{5^{10} \cdot 2^{19}} = 2$

в) $\frac{42^2 \cdot 625}{200 \cdot 49 \cdot 225} = \frac{7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^4}{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \frac{6^2}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{1}{2}$

**Пример 2.** Докажите, что выражение: а) $8^8 + 2^{19}$ кратно 33;

б) $3^{n+1} + 3^{n+2} - 3^n$ кратно 33.

а) Преобразуем сумму в произведение

$8^8 + 2^{19} = 2^{24} + 2^{19} = 2^{19} \cdot \left(2^5 + 1\right) = 2^{19} \cdot 33$, что и требовалось доказать.

б) Разложим выражение на множители

$3^{n+1} + 3^{n+2} - 3^n = 3^n \cdot (3 + 9 - 1) = 3^n \cdot 11 = 3^{n-1} \cdot 33$, что и требовалось доказать.

**Упражнения**

1. Вычислить устно

а) $\left(3\frac{2}{7}\right)^9 \cdot \left(\frac{7}{23}\right)^9$ [1]

б) $\left(7\frac{1}{3}\right)^4 : \left(3\frac{2}{3}\right)^4$ [16]

в) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$ [1]

г) $\frac{3^5 \cdot 81}{9^3}$ [27]

д) $17^4 : (8{,}5)^4$ [16]

2. Вычислите наиболее рациональным способом

а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3^3}{4} - \frac{3}{(-4)^3}$ $\left[\frac{51}{8}\right]$

б) $\frac{12^6}{3^5 \cdot 2^{11}}$ [6]

в) $\frac{252 \cdot 625}{20 \cdot 7 \cdot 15^2}$ [5]

3. Докажите, что значение выражения:

а) $27^6 + 3^{20}$ кратно 30,

б) $91^{10} + 42^{10} - 85^{10}$ делится на 10.

2.7. Применение формул сокращённого умножения

Часто в вычислительных примерах используются формулы сокращённого умножения и деления. Поэтому очень важно знать эти формулы, уметь читать их как слева направо, так и справа налево, видеть их в математических выражениях.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы);

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности);

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (разность квадратов);

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов);

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов).

**Пример 1.** Вычислить, применяя формулу $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

а) $99 \cdot 101 = (100+1)(100-1) = 10000 - 1 = 9999,$

б) $17{,}3 \cdot 16{,}7 = (17+0{,}3)(17-0{,}3) = 289 - 0{,}09 = 288{,}91,$

**в)** $99\frac{7}{9} \cdot 100\frac{2}{9} = \left(100 + \frac{2}{9}\right)\left(100 - \frac{2}{9}\right) = 10000 - \frac{4}{81} = 9999\frac{77}{81}.$

**Пример 2.** Вычислить, применяя формулу $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

а) $76^2 - 24^2 = (76+24)(76-24) = 100 \cdot 52 = 5200,$

б) $0{,}783^2 - 0{,}217^2 = (0{,}783 + 0{,}217)(0{,}783 - 0{,}217) = 1 \cdot 0{,}566 = 0{,}566,$

в) $\dfrac{17{,}5^2-9{,}5^2}{131{,}5^2-3{,}5^2}=\dfrac{(17{,}5+9{,}5)(17{,}5-9{,}5)}{(131{,}5+3{,}5)(131{,}5-3{,}5)}=\dfrac{8\cdot 27}{128\cdot 135}=\dfrac{1\cdot 1}{16\cdot 5}=\dfrac{1}{90}$.

**Пример 3.** Сформулировать правило, с помощью которого можно возвести в квадрат число, оканчивающееся на 5.

Пусть данное число равно $10a+5$, тогда $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a\cdot(a+1)+25$. Итак, правило: для возведения в квадрат числа, оканчивающегося на 5, достаточно отбросить у него последнюю цифру, а затем перемножить полученное число с числом, большим его на 1, и приписать к результату права 25.

Например,
$$85^2=8\cdot 9\cdot 100+25=7225,$$
$$115^2=11\cdot 12\cdot 100+25=13225.$$

**Упражнения**

1. Вычислить устно

а) $83\cdot 77$ $[6391]$

б) $6{,}01\cdot 5{,}99$ $[35{,}9999]$

в) $29{,}8\cdot 30{,}2$ $[899{,}96]$

г) $10\frac{1}{7}\cdot 9\frac{6}{7}$ $\left[99\frac{48}{49}\right]$

д) $126^2-74^2$ $[10400]$

е) $21{,}3^2-21{,}2^2$ $[4{,}25]$

ж) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2-\left(4\frac{1}{3}\right)^2$ $\left[13\frac{1}{3}\right]$

з) $\dfrac{82^2-18^2}{64}$ $[100]$

и) $\dfrac{75^2-525}{10}$ $[510]$

2. Вычислить наиболее рациональным способом

а) $\dfrac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$ $\left[\dfrac{15}{64}\right]$

б) $\dfrac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

в) $\dfrac{3{,}2^2-6{,}4^2}{1{,}6^2+3{,}2^2}$ $[-2{,}4]$

г) $\dfrac{3{,}76^3-1{,}24^3}{2{,}52}+1{,}24\cdot 3{,}76$ $[5]$

е) $\dfrac{1{,}46^3+0{,}36^3}{1{,}82}-0{,}36\cdot 1{,}46$ $[1{,}21]$

ж) $\left(\dfrac{73^3+57^3}{130}-73\cdot 57\right):\left(22^2-10^2\right)$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

з) $0{,}87^2+0{,}26\cdot 0{,}87+0{,}0169$ $[1]$

3. Сравните (без использования таблиц и микрокалькулятора):

$12977\cdot 12979$ и $12978^2$ $[\le]$

2.8. Вычисление квадратов

**Задача 1. Квадраты близких чисел**

Пусть вы помните квадрат какого-то числа и хотите по нему быстро восстановить квадрат числа, отличающегося от исходного на 1 или 2. Как это можно сделать, не производя операции возведения в квадрат?

Если вы помните только квадраты чисел, кратных 5, то без особого напряжения сможете восстанавливать квадраты остальных целых чисел. Как именно?

**Решение.** Квадраты двух соседних чисел различаются на сумму этих чисел, поскольку имеют место равенства

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a+1 = (a+1)+a.$$

Аналогично, если числа различаются на 2, то разность их квадратов

$$(a+2)^2 - a^2 = 4a+4 = 4(a+1) = 2((a+2)+a)$$

равна удвоенной сумме этих чисел. Так как любое целое число отличается от ближайшего числа, кратного 5, не более чем на 2, то, пользуясь указанными здесь соображениями, можно восстановить его квадрат.

Например,

$$31^2 = 30^2 + (31+30) = 900+61 = 961$$

$$32^2 = 30^2 + 2(32+30) = 900+124 = 1024$$

$$33^2 = 35^2 - 2(33+35) = 1225-136 = 1089$$

$$34^2 = 35^2 - (34+35) = 1225-69 = 1156$$

**Задача 2. Квадрат числа, близкого к «круглому»**

Быстрому возведению в квадрат может способствовать умение перемножать в уме любые числа с некоторыми числами специального вида, например

$$192^2 = 200\cdot 184 + 8^2 = 36800+64 = 36864,$$

$$412^2 = 400\cdot 424 + 12^2 = 169600+144 = 169744.$$

На каком приёме основаны вычисления квадратов в данных примерах?

**Решение.** Вычисление квадратов в разобранных примерах основано на формуле $a^2 = (a+b)(a-b)+b^2$, в которой удачный подбор числа $b$ сильно облегчает выкладки. Во-первых, один из сомножителей должен оказаться «круглым» числом (желательно, чтобы ненулевой его цифрой была только первая), во-вторых, само число $b$ должно легко возводиться в квадрат, т. е. должно быть небольшим. Эти условия реализуются как раз на числах $a$, близких к «круглым». Например,

$$216^2 = 200\cdot 232 + 16^2 = 46400+256 = 46656$$

$$398^2 = 400\cdot 396 + 2^2 = 158400+4 = 158404$$

$$503^2 = 500\cdot 506 + 3^2 = 253000+9 = 253009$$

**Задача 3. Следующие 25 квадратов**

Если вы знаете квадраты всех чисел от 1 до 25, то вам нет никакой необходимости заучивать квадраты следующих 25 чисел. Для возведения в квадрат любого числа, заключённого между 25 и 50, достаточно отнять от него 25 и, увеличив результат в 100 раз, прибавить к нему квадрат дополнения этого числа до 50. Например, справедливы равенства

$$37^2 = (37-25)\cdot 100 + (50-37)^2 = 1200+169 = 1369$$

Дайте обоснование предложенному способу.

**Решение.** Пусть надо найти квадрат числа $a$, заключённого между 25 и 50. Тогда, пользуясь формулой из предыдущей задачи, получаем

$$a^2 = (a+(50-a))(a-(50-a))+(50-a)^2 =$$

$$= 50(2a-50)+(50-a)^2 = (a-25)\cdot 100+(50-a)^2,$$

откуда следует справедливость предложенного способа.

Например,

$$28^2 = (28-25)100 + (50-28)^2 = 300 + 484 = 784$$
$$46^2 = (46-25)100 + (50-46)^2 = 2100 + 16 = 2116$$
$$39^2 = (39-25)100 + (50-39)^2 = 1400 + 121 = 1521$$

**Задача 4. Квадраты чисел, больших 50**

Как изменить описанную в предыдущей задаче процедуру возведения в квадрат, чтобы она годилась и для двузначных чисел, больших 50?

**<u>Решение.</u>** Приведённые в решении предыдущей задачи выкладки справедливы для любого числа *a*, поскольку они не используют оценок $25 \le a \le 50$. Для описания же процедуры возведения в квадрат двузначного числа *a*, большего 50, имеет смысл в соответствующем описании из условия предыдущей задачи «дополнение» числа *a* до 50 заменить дополнением 50 до числа *a*, а вычитание 25 из числа *a* – прибавлением 25 к уже найденному дополнению *a-50*. Действительно, с учётом формулы из решения предыдущей задачи имеем $a^2 = (a-25)\cdot 100 + (50-a)^2 = ((a-50)+25)\cdot 100 + (a-50)^2$

Например,

$$63^2 = (13+25)100 + 13^2 = 3800 + 169 = 3969$$
$$58^2 = (8+25)100 + 8^2 = 3300 + 64 = 3364$$
$$71^2 = (21+25)100 + 21^2 = 4600 + 441 = 5041$$

Часть 3

Вычислительная арифметика

(Практические задания)

3.1. Действия с рациональными числами

Произвести вычисления

3.1) $\left(23\frac{11}{18} - 16\frac{23}{24}\right) - \left(9\frac{5}{18} - 7\frac{17}{24}\right)$ $\left[5\frac{1}{12}\right]$

3.2) $\left(1\frac{3}{4} + 1{,}44 - 1{,}75\right) : 1{,}2 + (9{,}1 - 8{,}317)\cdot\frac{10}{87}$ $[1{,}29]$

3.3) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11}\cdot 4{,}125}{2\frac{4}{7} : \frac{3}{35}}$ $[1]$

3.4) $\dfrac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right)\cdot 230{,}04 + 46{,}75}{0{,}01}$ $[1]$

3.5) $\dfrac{\left(5\frac{4}{45} - 4\frac{1}{6}\right) : 5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3} + 0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7} + \dfrac{0{,}3 : 0{,}01}{70} + \dfrac{2}{7}$ $[1]$

3.6) $\dfrac{\left(\frac{3}{5} + 0{,}425 - 0{,}005\right) : 0{,}1}{\frac{1}{6} + 3\frac{1}{3} + 30{,}5} + \dfrac{6\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2}}{26 : 3\frac{5}{7}} - 0.05$ $[2]$

3.7) $$\frac{3\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$$ [16]

3.8) $$\frac{\left[\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\cdot\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right]\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$$ [5]

3.9) $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5$$ [9]

3.10) $$\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\frac{5}{9}\right)-\frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\frac{1}{18}$$ [10]

3.11) $$\frac{\left[1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right]\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$$ [12]

3.12) $$\frac{0{,}46^3-0{,}26^3}{0{,}2}-3\cdot 0{,}26\cdot 0{,}46$$ [0,04]

3.13) $$\frac{12{,}5^3+1{,}2^3}{13{,}7}-12{,}5^2-1{,}2^2$$ [15]

3.14) $$\frac{1}{3}\cdot\left(0{,}87^3+2{,}13^3\right)+3\cdot 0{,}87\cdot 2{,}13$$ [9]

3.15) $$9{,}181^3+30\cdot 9{,}181\cdot 0{,}819+0{,}819^3$$ [1000]

3.16) $$6{,}4^3-12\cdot 6{,}4\cdot 2{,}4-2{,}4^3$$ [64]

3.2. Пропорции

Найти неизвестный член пропорции

3.17) $$\left(1{,}25\cdot 14{,}8+0{,}75\cdot 1{,}2+14{,}8\cdot 0{,}75+1{,}2\cdot 1{,}25\right):x=2:0{,}125$$ [2]

3.18) $$\frac{1{,}2\cdot 1{,}1+0{,}8\cdot 14{,}9+1{,}2\cdot 14{,}9+0{,}8\cdot 1{,}1}{64\cdot 0{,}25}=\frac{x}{8}$$ [16]

3.19) $$\frac{\left[4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:0{,}14}{x}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{21}{84}-40\frac{49}{60}}$$ $\left[1\frac{1}{12}\right]$

3.20) $\dfrac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\cdot\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}$ [5]

3.21) $\dfrac{15{,}2\cdot\frac{1}{4}-48{,}51:14{,}7}{x}=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\cdot\left(5{,}5-3\frac{1}{4}\right)}$ [25]

3.3 Выражения, содержащие степень

Найти значение выражения

3.22) $\dfrac{15^2\cdot 21^2}{35\cdot 3^4}$ [35]

3.23) $\dfrac{14^2\cdot 18\cdot 125}{15^2\cdot 196}$ [10]

3.24) $\dfrac{2^5\cdot 54\cdot 8^2}{32\cdot 144\cdot 2^3}$ [3]

3.25) $\dfrac{14^{10}}{2^8\cdot 7^9}\cdot\dfrac{13^6\cdot 8^4}{26^5}$ [46592]

3.26) $\dfrac{12^5}{2^3\cdot 3^4}:\dfrac{10^5}{2^6\cdot 5^7}$ [19200]

3.27) $\dfrac{2^8\cdot 7^9}{14^{10}}:\dfrac{26^5}{13^6\cdot 8^4}$ $\left[59\frac{3}{7}\right]$

3.4. Уравнения

Найти $x$ из следующих равенств

3.28) $\left(\dfrac{1}{25\cdot 26}+\dfrac{1}{26\cdot 27}+\dfrac{1}{27\cdot 28}+\dfrac{1}{28\cdot 29}+\dfrac{1}{29\cdot 30}\right)\cdot 150+1{,}03\cdot\left[10.3\cdot(x-1)\right]=11$

[1,01]

3.29) $\left(\dfrac{2}{11\cdot 13}+\dfrac{2}{13\cdot 15}+\dfrac{2}{15\cdot 17}+\dfrac{2}{17\cdot 19}+\dfrac{2}{19\cdot 21}\right)\cdot 462-\left[2{,}04:(x+1{,}05)\right]:0{,}12=19$

[15,95]

Решить уравнения

3.30) $12\frac{3}{5}:\left[5\frac{2}{15}+\left(5\frac{5}{9}-\dfrac{8\frac{3}{4}}{\frac{8}{21}\cdot x-1\frac{2}{5}}\right)\cdot 5\frac{68}{125}\right]-\frac{2}{11}=\frac{4}{5}$ $\left[9\frac{3}{16}\right]$

3.31) $\left(3{,}25-\dfrac{\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot 0{,}53}{0{,}75}\right):6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$ $\left[1\frac{19}{24}\right]$

3.32) $4{,}98-120{,}12:\left[8{,}008\cdot\left(4{,}0025-\frac{1{,}12211-2x}{4{,}444}\right)\right]+0{,}03=1{,}01$ $[0]$

3.33) $2\cdot[0{,}2-0{,}2:(0{,}002+0{,}0002\cdot x)]=0{,}3$ $[1990]$

3.34) $50{,}32-21{,}32:[(20+9{,}744:x)\cdot 0{,}5-1{,}63]=48{,}27$ $[2{,}4]$

3.35) $[(2-x):1{,}5+17{,}4:29]:(25\cdot 0{,}16)-0{,}005=0{,}4$ $[0{,}47]$

3.5. Итоговый тест по теме

«Приёмы быстрого счёта»

НОМЕРА ОТВЕТОВ НА ВОПРОСЫ ТЕСТА

| Вариант 1 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 5 | 1 | 1 | 4 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 | 5 | 3 | 4 | 1 |
| | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 |

| Вариант 2 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 3 | 1 |
| | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| | 5 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 5 |

**II часть:**

**Тема 1. Проценты. Основные задачи на проценты (3 часа)**

Сообщается история появления процентов; устраняются пробелы в знаниях по решению основных задач на проценты: а) нахождение процента от числа (величины); б) нахождение числа по его проценту; в) нахождение процента одного числа от другого. Актуализируются знания об арифметических и алгебраических приемах решения задач.

*Форма занятий*: объяснение, практическая работа.

*Метод обучения*: лекция, беседа, объяснение.

*Форма контроля*: проверка самостоятельно решенных задач, самостоятельная работа.

**Тема 2. Процентные расчёты в жизненных ситуациях (4 часа)**

Показ широты применения в жизни процентных расчетов. Введение базовых понятий экономики: процент прибыли, стоимость товара, заработная плата, бюджетный дефицит и профицит, изменение тарифов, пеня и др. Решение задач, связанных с банковскими расчетами: вычисление ставок процентов в банках; процентный прирост; определение начальных вкладов. Выполнение тренировочных упражнений.

*Форма занятий*: объяснение, практическая работа.

*Метод обучения*: выполнение тренировочных задач.

*Формы контроля:* проверка самостоятельно решенных задач, самостоятельная работа.

**Тема 3. Задачи на смеси, сплавы, растворы (3 часа)**

Усвоение учащимися понятий концентрации вещества, процентного раствора. Формирование умения работать с законом сохранения массы. Обобщение полученных знаний при решении задач на проценты.

*Форма занятий*: комбинированные занятия.

*Метод обучения:* рассказ, объяснение, выполнение практических заданий.

*Формы контроля*: проверка самостоятельно решенных задач, самостоятельная работа.

**Тема 4. Проценты в заданиях единого государственного экзамена (2 часа)**
*Форма занятий*: практическая работа.
*Метод обучения*: объяснение, выполнение практических заданий.
*Форма контроля*: проверка самостоятельно решенных задач, самостоятельная работа.
**Тема 5. Решение разнообразных задач по всему курсу (3 часа)**
*Форма занятий*: практическая работа.
*Методы занятий*: беседа, творческие задания.
*Форма контроля*: проверка самостоятельно решенных задач, самостоятельная работа.
**Тема 6. Заключительное занятие. Зачётная работа (2 часа)**
**Вводный тест по теме «Проценты»**

1. Найдите 25% от 56.

А) 14 Б) 22,04 В) 20 Г) 25

2. Найдите число, если 1% его равен 75.

А) 0,75 Б) 7,5 В) 7500 Г) 750

3. Клубника содержит 6% сахара. Сколько килограммов сахара в 27 кг клубники?
А) 1,82 кг Б) 1,62 кг В) 2,24 кг Г) 2,42 кг

4. Книга стоила 25 р. После повышения цены она стоит 30,25 р. На сколько процентов возросла стоимость книги?
А) на 21% Б) на 20% В) на 24% Г) на 25%

5. Найдите число, 34% которого равны 170.

А) 57,8 Б) 500 В) 56,5 Г) 510

6. На математической олимпиаде 32% участников получили грамоты. Сколько школьников приняло участие в олимпиаде, если наградили 416 человек?
А) 932 Б) 1300 В) 133,1 Г) 1340

7. Надо вспахать участок поля в 500 га. В первый день вспахали 150 га. Сколько процентов составляет вспаханный участок от всего участка?
А) 330% Б) 30% В) 125% Г) 45%

8. Число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить полученное число, чтобы получить данное число?
А) на 20% Б) на 40% В) на 25% Г) на 30%

9. Число 56 составляет 80% от некоторого числа. Найдите среднее арифметическое этих чисел.
А) 63 Б) 44,8 В) 126 Г) 56

10. Сторону квадрата уменьшили на 20%. На сколько процентов уменьшилась его площадь?
А) на 20% Б) на 36% В) на 10% Г) на 40%

Таблица ответов:

| **№ задания** | **Ответ** |
|---|---|
| 1 | А |
| 2 | В |
| 3 | Б |

| | |
|---|---|
| 4 | А |
| 5 | Б |
| 6 | Б |
| 7 | Б |
| 8 | В |
| 9 | А |
| 10 | Б |

**РАЗДЕЛ 1.**

1. В классе присутствует 60% всех учащихся. Сколько процентов учащихся отсутствует?
1. Выразите в процентах ¼ всех жителей города.
3. Найдите 16% от 20000 рублей.
4. Сколько будет, если 20000 руб. увеличить на 16%?
5.Сколько процентов составляют 400 руб. от 200 руб.?
6. 20% некоторой суммы составляют 100 рублей. Какая это сумма?

**РАЗДЕЛ 2.**

Задания представлены в виде текстовых задач.

1. Квартирная плата повысилась на 20%. За прошлый месяц заплачено 120рублей. Сколько надо заплатить за текущий месяц?
2. В референдуме приняли участие 18 тыс. человек, что составило 60% всех жителей города, имеющих право голоса. Сколько жителей имеют право голоса?
3. В 5 тысячах из выпущенных 20 тысяч коробочек с жевательной резинкой находится сюрприз. Сколько процентов составили коробочки с сюрпризами?
4. Банком установлен тариф на пролонгацию аккредитива в размере 0,2% за квартал от суммы аккредитива. Вычислите размер комиссионных за пролонгацию аккредитива на сумму 100000 рублей за один квартал?
5. В первом квартале литр молока стоил 10 рублей. Во втором квартале цена на молоко повысилась на 20%, а в третьем еще на 50%. Сколько стал стоить литр молока?
6. Фирма платит разносчикам рекламных изданий за первую партию 10 тыс. рублей, а за каждую следующую в тот же день – на 5% больше по сравнению с предыдущей. Сколько получит человек, если в течение одного дня он разнес 4 партии изданий?

**РАЗДЕЛ 3.**

1. 15% жителей города ежегодно слушают ВВС, 45% - радио «Свобода» и 40% - «Голос Америки». Можно ли сказать, что все жители города ежедневно слушают передачи западного радио?
2. Себестоимость товара 30 тыс. рублей. В магазине этот товар продается по цене 90 тыс. руб. Сколько процентов от себестоимости составляет розничная цена.
3. Валовой национальный продукт государства составил 33 млрд. долларов, что соответствует 75% от планировавшегося бюджетом. Найдите плановую величину НВП этого государства.
4. Подоходный налог установлен в размере 13%. До вычета подоходного налога 1% заработной платы отчисляется в пенсионный фонд. Работнику начислено 5420 рублей. Сколько он получит после указанных вычетов?
5. Инфляция составляет 10% каждый месяц. Сколько процентов составила инфляция за два месяца?
6. В результате мелиоративных мероприятий посевные площади увеличились на 150% по сравнению с прошлым годом. Найдите величину посевных площадей этого года, если в прошлом году она была 60 га

**ЗАДАНИЯ ИЗ ВАРИАНТОВ ЕГЭ**

1. Смешали 160 г раствора, содержащего 60% соли, и 240 г раствора, содержащего 40% соли. Сколько процентов соли в получившемся растворе?
2. В январе пакет акций стоил на 10% меньше, чем в феврале. В феврале этот же пакет акций стоил на 20% меньше, чем в марте. На сколько процентов меньше стоимость акций в январе, чем в марте?
3. Предприятие уменьшило выпуск продукции на 20%. На сколько процентов необходимо теперь увеличить выпуск продукции, чтобы достигнуть его первоначального уровня?

4. Зарплату повысили на p%. Затем новую зарплату повысили на 2p%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

**ЗАДАНИЯ ИЗ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗы**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Имеются три металлических слитка. Первый весит 5 кг, второй – 3 кг, и каждый из этих двух слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти вес третьего слитка и процент содержания меди в нем.

**ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота. На долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% - в проект Y. В зависимости от обстоятельств проект X может принести прибыль в размере от 19 до 24% годовых, а проект Y – от 29 до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможный уровень % - ой ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10 и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

**СОЦИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: «Что Вы предпочитаете, кашу или компот?» - большая часть ответила: «Кашу», меньшая: «Компот», а один респондент: «Затрудняюсь ответить». Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% - грушевый. У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56,25% выбрали манную кашу, 37,5% - рисовую, и лишь один ответил: «Затрудняюсь ответить». Сколько детей было опрошено?

**ОЛИМПИАДА ПО ЭКОНОМИКЕ**

**Задача 1.** Господин Лебединский арендует Белый Дом и платит за аренду 20000 долларов в год. Остальные деньги он хранит в банке, что приносит ему 12% годовых. Стоимость дома- 180000 долл. Определите, стоит ли Лебединскому приобретать этот дом, если ему представится такая возможность.

**Задача 2.** В течении трех лет инфляция составляла соответственно по годам: 1-й год-15%, 2-ой год-29%, 3-й год-33%. Вы положили свой капитал в банк на 3 года под 21% годовых. На сколько % за 3 года ваш капитал увеличился или уменьшился в реальном исчислении?

**ПРОЦЕНТНОЕ СОДЕРЖАНИЕ, ПРОЦЕНТНЫЙ РАСТВОР**

Тип задач на составление уравнений и систем уравнений – задачи на сплавы и смеси, решение которых связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «проба», «влажность».

Процентное содержание вещества в растворе, иногда называют %-м раствором, например, 15%-й раствор соли.

***1. Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если %-е содержание соли 15%?***

Решение: $10 \cdot 0{,}15 = 1{,}5$(кг).

Ответ: 1,5 кг.

Процентное содержание вещества в сплаве – это часть, которую составляет вес данного вещества от веса всего сплава.

***2. Сплав содержит 10 кг олова и 15 кг цинка. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?***

Решение:

1) $10 + 15 = 25$(кг) сплав;

2) 10 : 25 · 100% = 40% процентное содержание олова в сплаве.
3) 15 : 25 · 100% = 60% процентное содержание цинка в сплаве.
Ответ: 40%, 60%.

**КОНЦЕНТРАЦИЯ, СМЕСИ И СПЛАВЫ**

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

**Пример**. *Концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%. Это означает, что чистого серебра в сплаве 300·0,87 = 261 г.*

В этом примере концентрация вещества выражена в процентах.

Отношение объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1. В этом случае концентрация – безразмерная величина.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле: к = р : 100%,

к – концентрация вещества;

р – процентное содержание вещества (в процентах).

**Дополнительные задачи.**

**Задача 1.** ***Имеется два сплава, в одном из которых содержится 40%, а в другом 20% серебра. Сколько кг второго слава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы после сплавления вместе получить сплав, содержащий 32% серебра?***

**Решение** (с помощью уравнения): Пусть к 20 кг первого сплава нужно добавить X кг второго сплава. Тогда получим (20+X) кг нового сплава. В 20 кг первого сплава содержится 0,4·20 = 8 (кг) серебра, а в (20+X) кг нового сплава содержится 0, 32·(20+X) кг серебра. Составим уравнение: 8+0,2X = 0,32(20+X), X=13 1/3.

**Ответ:** 13 1/3 кг второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32% серебра.

**Задача 2.** ***При смешивании 5%-ного раствора кислоты с 40%-ным раствором кислоты получили 140 г 30%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?***

**Решение** (с помощью системы уравнений):

Проследим за содержанием кислоты в растворах. Возьмем для смешивания X г 5%-ного раствора кислоты (или 0,05X г) и Y г 40%-ного раствора (или 0,4Y г). Так как в 140 г нового раствора кислоты стало содержаться 30%, т. е. 0,3·140 г, то получаем следующее уравнение 0,05X + 0,4Y = 0,3·140. Кроме того X + Y = 140.

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}05X + 40Y = 30\cdot 140, \\ X + Y = 140. \end{cases}$$

Из этой системы находим X = 40, Y = 100. Итак, 5%-ного раствора кислоты следует взять 40 г, а 40%-ного раствора – 100 г.

**Ответ:** 40 г, 100 г.

**ЗАДАЧИ НА ВЛАЖНОСТЬ И СПЛАВЫ**

**B13 (99574)** Виноград содержит 90% влаги, а изюм 5%. Сколько килограмм винограда требуется для получения 20 килограмм изюма?

**Решение**: Пусть x (кг), винограда требуется для получения 20 кг изюма.

Проследим за количеством сухого вещества в винограде и изюме.

В винограде 90% влаги, значит 10% сухого вещества. В изюме 5% влаги, значит 95% сухого вещества. Составим таблицу.

| | Сухое вещество | Количество в кг |
|---|---|---|
| Виноград | 0,1x | x |
| Изюм | 0,95·20 | 20 |

Уравняем количество сухого вещества в винограде и изюме, составив уравнение

0,1x = 19

x = 190

190(кг) винограда надо взять.
**Ответ:** 190 кг.

**B13 (99576)** Первый сплав содержит 10% меди, второй – 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 килограмма. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в кг.

Решение: Проследим за количеством меди в каждом сплаве. Пусть x(кг) масса первого сплава, (x + 3) масса второго сплава. Меди в первом сплаве 10%, значит масса меди в первом сплаве 0,1x. Меди во втором сплаве 40%, значит масса меди во втором сплаве 0,4(x + 3). Масса третьего сплава (x + x + 3). Меди в третьем сплаве 30%, значит масса меди в третьем сплаве 0,3 (2x +3). Занесем данные в таблицу.

| | Медь | Масса сплава в кг |
|---|---|---|
| I сплав | 0,1x | x |
| II сплав | 0,4 (x + 3) | x +3 |
| III сплав | 0,3 (2x + 3) | x + x + 3 |

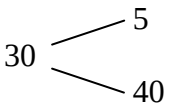
Составим уравнение, исходя из количества меди в каждом сплаве
0,1x + 0,4 (x + 3) = 0,3 ( 2x + 3)
- 0,1x = - 0,3
x = 3
3(кг) масса первого сплава, масса третьего сплава 9 кг.

Ответ: 9 кг.

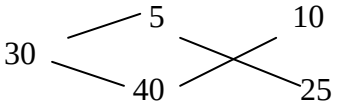
**Старинный способ решения**

Таким способом можно решать задачи на смешивание (сплавление) любого числа веществ. Задачам подобного типа уделялось значительное внимание в старинных рукописях и «Арифметике» Л. Ф. Магницкого. Данный способ позволяет получить правильный ответ.

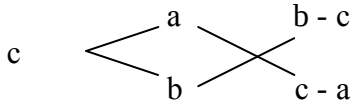
Решим предыдущую **задачу 2** старинным способом. Друг под другом пишутся содержания кислот имеющихся растворов, слева от них и примерно посередине – содержание кислоты в растворе, который должен получиться после смешивания. Соединив написанные числа черточками, получим такую схему:




Рассмотрим пары 30 и 5; 30 и 40. В каждой паре из большего числа вычтем меньшее, и результат запишем в конце соответствующей черточки. Получится такая схема:

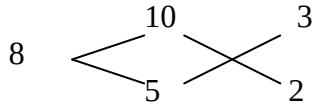



Из нее делается заключение, что 5%-ного раствора следует взять 10 частей, а 40%-ного – 25 частей (140 : 35 = 4 г приходится на одну часть), т. е. для получения 140 г 30%-ного раствора нужно взять 5%-ного раствора 40 г, а 40%-ного – 100 г.
**Ответ:** 40 г, 100 г.
**Задача 3.**
В общем виде решим задачу старинным способом.
***Предположим, что смешиваются X г a%-ного раствора кислоты (или a:100X г) и Y г b%-ного раствора кислоты (или b:100Y г). При этом необходимо получить c%-ный раствор.***
**Решение:** Пусть для определенности, a < c < b,



**Задача 4.** ***К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%-ный раствор соли и получили 8%-ный раствор. Какое количество литров 5%-ного раствора добавили?***

**Решение** (старинным способом):




Таким образом 15 л – это 3 части, 15 : 3 = 5 л приходится на одну часть, тогда 5 · 2 = 10 л добавили 5%-ного раствора.

**Ответ**: 10 л.

**Задачи** из приложения 6 (задания из вариантов ЕГЭ) №1-4.

Математические знания, безусловно, должны носить четко выраженный **прагматический характер.** К такому кругу относятся знания, связанные с процентами. Их прагматическая значимость очевидна, в особенности для современного общества. В частности, вполне практические задачи повседневной жизни человека, возникающие, в том числе и у старшеклассников и непосредственным образом связанные с процентами, требуют для своего решения не только первичных знаний о процентах, получаемых в основной школе, но и значительно большего круга математических понятий.

**Задача 1.**

*Стоимость компьютера 1250 долларов. Какова будет его стоимость после снижения цены на 20%?*

**Задача 2.**

*Торт стоил 100 рублей. Сначала цену повысили на 10%, а затем снизили на 10% (от новой цены). Сколько теперь стоит торт?*

В первую очередь изучению – на основной или старшей ступени – подлежат «сложные» проценты. Понятия «простых» и «сложных» процентов, при условии достаточного овладения учащимися этими понятиями, могут послужить мощным источником мотивации введения многих математических понятий. Основой для введения арифметической и геометрической прогрессий. Приведу в качестве примера три задачи.

**Задача 3.**

*Скорость тела, движущегося равноускоренно, каждую секунду увеличивается на 10%. В данный момент его скорость10,00 м/сек. Какова будет его скорость через три секунды?*

**Задача 4.**

*При внесении квартирной платы на один день позже установленного срока начисляется пеня в размере 0,1% от суммы платежа. Сколько придется заплатить в случае задержки квартирной платы на три месяца, если квартирная плата составила 100 рублей?*

**Задача 5.**

*Банком установлена процентная ставка из расчета 3% в месяц. Сколько денег должен получить гражданин, вложивший в этот банк 100 рублей на 3 месяца?*

Следует заметить, что самые естественные примеры могут служить «материальным» доказательством сравнения скорости роста арифметической и геометрической прогрессий. Этот факт оказывается, таким образом, не чисто математическим, причем достаточно сложным «изысканием», а совершенно очевидным «на практике» утверждением.

**Задача 6.**

*Выгодно ли гражданину задержать на три месяца внесение квартирной платы (задача 4), вложив эти 100 рублей в банк (задача 5)?*

Линия геометрической прогрессии в дальнейшем, на старшей ступени естественным образом перерастает из дискретной модели в непрерывную, т.е. степенную, показательную и логарифмическую функцию.

**Решение задач с помощью уравнения**

Проблема заключается в том, что даже при решении несложных задач, возникают затруднения при переводе текста задачи на язык уравнений.

**Систематизируем знания по данному вопросу.**

Неизвестную величину обозначим через X, тогда

- чтобы найти 20% от нее, надо 0,2X;
- чтобы увеличить ее, например, на 10%, надо X+0,1X=1,1X;
- чтобы уменьшить ее, например, на 30%, надо X-0,3X=0,7X,
- в общем виде: если 0 < P < 100,
- чтобы найти P% от X, надо 0,PX;
- чтобы увеличить ее на P%, надо X+0,PX=1,PX;
- чтобы уменьшить ее на P%, надо X-0,PX=(1-0,P)X, далее составляем уравнение, соответствующее условию задачи.

**Задача**

*В двух школах поселка было 1500 учащихся. Через год число учащихся первой школы увеличилось на 10%, а второй – на 20%, и в результате общее число стало равным 1720. Сколько учащихся было в каждой школе первоначально?*

**Решение:**

Пусть X учащихся было в первой школе, тогда (1500-X) учащихся было во второй школе. После увеличения на 10% учащихся первой школы их стало X+0,1X=1,1X, а во второй школе стало (1500-X)+0,2(1500-X)=1500-X+300-0,2X=1800-1,2X учащихся. В результате их общее число стало равным 1720. Составим уравнение

$$1{,}1X+1800-1{,}2X=1720$$
$$-0{,}1X=-80$$
$$X=800$$

Таким образом получили, что 800 учащихся было в первой школе, тогда 700 учащихся было во второй школе первоначально.

**Ответ:** 800 и 700 учащихся.

**Решение с помощью системы уравнений**

Когда в условии задачи неизвестными являются две величины, то можно решить задачу с помощью системы уравнений. Решим предыдущую задачу с помощью системы уравнений.

**Решение:**

Пусть X учащихся было в первой школе, тогда Y учащихся было во второй школе. В двух школах поселка было 1500 учащихся. После увеличения учащихся первой школы их стало 1,1X, а во второй стало 1,2Y учащихся, в результате их общее число стало равным 1720. Составим систему уравнений и решим ее способом подстановки

$$\begin{cases} X+Y=1500, \\ 1{,}1X+1{,}2Y=1720; \end{cases} \quad \begin{cases} X=1500-Y, \\ 1{,}1(1500-Y)+1{,}2Y=1720; \end{cases} \quad \begin{cases} X=1500-Y, \\ Y=700; \end{cases} \quad \begin{cases} X=800, \\ Y=700. \end{cases}$$

**Ответ:** 800 и 700 учащихся.

**<u>Задача 1.</u>** Одной машинистке на перепечатку рукописи требуется на 12 ч больше, чем другой. Если 25% рукописи перепечатает первая машинистка, а затем к ней присоединится вторая машинистка, то на перепечатку рукописи им понадобиться 35 ч, считая от момента начала работы первой машинистки. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая отдельно?

**<u>Решение:</u>** Пусть на перепечатку рукописи первой машинистке требуется $x$ ч, тогда второй потребуется $(x-12)$ ч. На перепечатку 25% рукописи первая машинистка затратит $\frac{x}{4}$ ч. Выясним теперь, сколько времени потребуется двум машинисткам на перепечатку оставшихся 75% рукописи.

Первая машинистка перепечатывает за один час $\frac{1}{x}$ часть рукописи, вторая – $\frac{1}{x-12}$ часть рукописи, а вместе за час они перепечатывают $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-12}$ часть рукописи. На перепечатку $\frac{3}{4}$ рукописи им потребуется $\frac{3}{4}:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-12}\right)$ ч, т.е. $\frac{3x(x-12)}{4(2x-12)}$ ч. Отсюда получаем уравнение: $\frac{x}{4}+\frac{3x(x-12)}{4(2x-12)}=35$

Решив это уравнение, найдем, что оно имеет два корня: $x_1=60$ и $x_2=5{,}4$.

Второй корень не соответствует условию задачи.

**Ответ:** первой машинистке на перепечатку рукописи требуется 60 ч, а второй – 48 ч.

**<u>Задача 2</u>.** Положив в банк деньги, вкладчик получил через год прибыль в 240 тысяч рублей. Однако он не стал забирать деньги из банка, а, добавив к ним еще 60 тысяч, снова оставил деньги на год. В результате спустя еще год он получил в банке 1 миллион 100 тысяч рублей. Какая сумма была положена в банк первоначально и какой процент прибыли в год давал банк?

**<u>Решение:</u>** Допустим, что первоначальный вклад составляет $x$ тысяч рублей. Тогда процент прибыли за год равен $\frac{240}{x}\cdot 100\%$. Сумма вклада, положенного в банк через год, составила $x+240+60$ тысяч рублей, т.е. $x+300$ тысяч рублей. Этот вклад принес доход, равный $(x+300)\frac{240}{x}$ тысячам рублей. Всего вкладчик получил 1100 тысяч рублей.

Получаем уравнение: $(x+300)+\frac{(x+300)\cdot 240}{x}=1100$

Решив его, найдем, что это уравнение имеет два корня: $x_1=200$, $x_2=360.$ Выполнив расчеты, можно убедиться, что оба корня соответствует условию задачи.

**Ответ:** задача имеет два решения: вкладчик вложил первоначально 200 тысяч рублей и получил доход 120% в год или вкладчик вложил первоначально 360 тысяч рублей и получил доход $66\frac{2}{3}\%$ в год.

**<u>Задача 3</u>**. Имелось два слитка меди. Процент содержания меди в первом слитке был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором. После того как оба слитка сплавили, получили слиток, содержащий 36% меди. Найдите процентное содержание меди в первом и во втором слитках, если в первом слитке было 6 кг меди, а во втором – 12 кг.

**<u>Решение</u>:** Обозначим за $x$ массу первого слитка в кг, за $y$ массу второго слитка в кг, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{12}{y}-\frac{6}{x}=0{,}4\\ \frac{18}{y+x}=0{,}36\\ x>0,\ y>0\end{cases}$$

В результате получим: x=30, y=20.

**Ответ**: 30 кг, 20 кг

**<u>Задача 4</u>.** Для определения оптимального режима снижения цен социологи предложили фирме с 1 января снижать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине – в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 10%, в другом – через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо снижать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

**<u>Решение</u>:** Пусть $a$ руб. - стоимость товара, $x$ - число процентов. Тогда,

I магазин

Февраль $a - 0{,}1a = a(1 - 0{,}1)$

Март $a(1 - 0{,}1) - 0{,}1 \cdot a(1 - 0{,}1) = a(1 - 0{,}1)^2$

……

Июль $a(1 - 0{,}1)^6$

II магазин

Март $a - 0{,}01xa = a(1 - 0{,}01x)$

Май $a(1 - 0{,}01x)^2$

Июль $a(1 - 0{,}01x)^3$

По условию задачи через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковые, составляем уравнение:

$a(1 - 0{,}1)^6 = a(1 - 0{,}01x)^3$

$x = 21$

**Ответ:** на 21%.

**B13 (99567)** Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

**Решение:** I способ.

Пусть цена куртки - К и это 100%. Если 4 рубашки дешевле куртки на 8%, то их стоимость 100% - 8% = 92% стоимости куртки, т.е.

0,92К – стоимость четырех рубашек, тогда $\frac{0{,}92K}{4} = 0{,}23K$ - цена одной рубашки

0,23К · 5 = 1,15К – стоимость пяти рубашек.

Сравним стоимость пяти рубашек и куртки.

$\frac{1{,}15K - K}{K} \cdot 100\% = 15\%$

Ответ: 15%.

**II способ.**

Для упрощения рассуждений введем условную стоимость куртки -100 рублей.

Тогда 92 рубля – стоимость 4 рубашек, 92 : 4 = 23 (р) стоимость одной рубашки,

5 · 23 = 115 ( р) стоимость 5 рубашек.

$\frac{115 - 100}{100} \cdot 100\% = 15\%$

**Ответ:** 15%.

**III Задачи для самостоятельной работы**

Задача 1. В соответствии с договором фирма с целью компенсации потерь от инфляции была обязана в начале каждого квартала повышать сотруднику зарплату на 3%. Однако в связи с финансовыми затруднениями она смогла повышать ему зарплату только раз в полгода (в начале следующего полугодия). На сколько процентов фирма должна повышать зарплату каждые полгода, чтобы 1 января следующего года зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренной договором.

Решение: Пусть $a$ руб. - зарплата, $x$ - процент повышения зарплаты. Тогда,

По плану

I квартал $a(1 + 0{,}03)$ руб.

……

IV квартал $a(1 + 0{,}03)^4$ руб.

Фактически

I полугодие $a(1 + 0{,}01x)$ руб.

II полугодие $a(1 + 0{,}01x)^2$ руб.

По условию задачи зарплата сотрудника была равна той зарплате, которую он получил бы при режиме повышения, предусмотренного договором, составляем уравнение:

$a(1 + 0{,}03)^4 = a(1 + 0{,}01x)^2$

$x = 6{,}09$

Ответ: на 6,09 %.

Задача 2. На заводе было введено рационализаторское предложение. В результате время, необходимое для изготовления рабочими некоторой детали, уменьшилось на 20%. На сколько процентов возросла производительность труда этого рабочего?

Решение: Пусть $x$ - производительность труда, а $y$ - весь объем работы. Тогда работа будет выполнена за время $\frac{y}{x}$. В результате роста производительности труда время на изготовление детали стало равно $0{,}8\frac{y}{x}$, соответственно производительность $y : 0{,}8\frac{y}{x}$, или $\frac{x}{0{,}8}$. Соответственно рост производительности труда составил: $\frac{x/0{,}8 - x}{x} \cdot 100\% = 25\%$

Ответ: 25%

Задача 3. Из жителей города одни говорят только на украинском, другие – только на русском, третьи – на обоих языках. По-украински говорят 85% всех жителей, а по-русски – 75%. Сколько процентов всех жителей этого города говорят на обоих языках?

Решение:

100%-85%=15% - не говорят на украинском;

100%-75%=25% - не говорят на русском;

100%-15%-25%=60% - говорят на обоих языках.

Ответ: 60%

**B13 (99569)** Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и тоже число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рубля.

**Решение:** I способ

Пусть каждый год цена уменьшалась на x %, где 0 < x <100. (*)

Через год цена станет 20000 (1 - $\frac{x}{100}$), через два года 20000 ( 1 - $\frac{x}{100}$)$^2$.

Зная, что через два года цена станет равной 15842, составим уравнение

20000 ( 1 - $\frac{x}{100}$)$^2$ = 15842

2 (100 – x)$^2$ = 15842

(100 – x)$^2$ = 7921

x$^2$ - 200x + 2079 = 0

$\frac{D}{4}$ = 7921 = 89$^2$

x = 100 $\pm$ 89

x = 189, что не удовлетворяет условию (*)

x = 11

**Ответ** : на 11%.

**II способ**.

Заметим, что цена следующего года отличается от цены предыдущего года в К раз.

20000 · К$^2$ = 15842

К$^2$ = $\frac{15842}{20000} = \frac{7921}{10000}$

К = $\frac{89}{100}$

К = 0,89

Цена снижалась каждый год на 11%.

Ответ: на 11%.

**B13** Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

**I способ**. Введем условную стоимость 100 рублей – стоит рубашка.

Тогда 130 рублей стоят брюки. Пусть х рублей стоит пиджак. По условию задачи брюки дешевле пиджака на 22%. Зная это, составим уравнение

$$\frac{x-130}{x}=0{,}22$$

$x - 130 = 0{,}22x$

$0{,}78x = 130$

$x = \frac{13000}{78}$

$x = \frac{500}{3}$

$\frac{500}{3}$ (р) – стоимость пиджака.

Узнаем на сколько процентов рубашка дешевле пиджака.

$$\frac{\frac{500}{3}-100}{\frac{500}{3}}\cdot 100\% = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{500}{3}}\cdot 100\% = \frac{2}{5}\cdot 100\% = 40\%$$

**Ответ**: 40%.

**II способ**.

Пусть стоимость рубашки Р

Стоимость пиджака П

Стоимость брюк Б

По условию задачи стоимость брюк сравнивается со стоимостью рубашки и пиджака, поэтому 0,78 П = В = 1,3 Р

0,78 П = 1.3 Р

Р = $\frac{78}{130}$П = 0,6 П, т.е. стоимость рубашки составляет 60% от стоимости пиджака,

Значит рубашка дешевле пиджака на 40%.

**Ответ:** 40%.

**B13 (99568)** Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

**Решение:** Введем обозначения и смоделируем задачу.

М – зарплата мужа

Ж - зарплата жены

С - зарплата дочери – студентки

Д – их доход

Надо ответить на вопрос $\frac{Ж}{Д}\cdot 100\%$ -?

Исходя из условия М + Ж + С = Д (1)

2М + Ж + С = 1,67 Д (2)

М + Ж + $\frac{C}{3}$ = 0,96 Д (3)

(2) – (1): М = 0,67 Д

(1) – (3): $\frac{2}{3}\cdot$ С = 0,04 Д

С = 0,06 Д

Вернемся к равенству (1)
0,67 Д + Ж + 0,06 Д = Д
0,73 Д + Ж = Д
Ж = 0,27 Д
$\frac{0,27Д}{Д} \cdot 100\% = 27\%$
**Ответ**: 27%

1. Расходы на одну из статей городского бюджета составляют 12,5%. Выразите эту часть бюджета десятичной дробью.
2. Содержание некоторого вещества в таблетке витамина составляет 7,5%. Выразите эту часть десятичной дробью.
3. Из хлопка получается 30% волокна. Сколько потребуется хлопка, чтобы получить 60т волокна?
4. Для изготовления мороженого взяли 21 кг сахара, 129 кг других продуктов. Определите процент сахара в полученном мороженом.
5. В 140 г воды добавили 60г соли. Сколько процентов соли в этом соленом растворе?
6. Сплав состоит из меди и олова. Меди в нем 60%, что больше олова на 2 кг. Сколько килограмм меди в сплаве?
7. Смешали раствор массой 300г и концентрацией 15% с раствором массой 500г и концентрацией 9%. Чему равна концентрация (%) полученной смеси?
8. Имеются два сплава из свинца и меди. Первый сплав содержит 3кг свинца и 2кг меди, а второй – 13кг свинца и 7кг меди. В каком сплаве процентное содержание свинца больше и на сколько процентов?

**ЗАДАЧИ ИЗ ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО СБОРНИКА**
**№ 635**
В школьной библиотеке 210 учебников математики, что составляет 15% всего библиотечного фонда. Сколько всего книг в библиотеке?
**№ 637**
Утром было продано 28% товара, днем – в два раза больше, а вечером – оставшиеся 32 кг. Сколько всего кг товара было продано?
**№ 639**
Банк за год начисляет 20% на вложенную сумму. Какую сумму вкладчик внес на счет, если через год на счету оказалось 1920 руб.?
**№ 641**
За стиральную машину и ее установку заплатили 7840 р. Стоимость установки составляет 12% от стоимости машины. Сколько стоит машина?
**№ 643**
В девятых и десятых классах школы 162 ученика. Число учащихся десятых классов составляет 80% числа учащихся девятых классов. Сколько в школе девятиклассников и сколько десятиклассников?
**№ 645**
Определите стоимость товара до уценки, если после снижения цены на 30% он стал стоить 56 р.
**№ 647**
В школе два девятых класса. В 9 «А» учатся 52% всех девятиклассников, а в 9 «Б» - 24 человека. Сколько всего учеников в 9-х классах?
**№ 649**
В ателье за февраль сшили 126 юбок. Это оказалось на 10% меньше, чем было сшито за январь. Сколько было сшито юбок в январе?
**В1 (26631)** В городе N живет 200000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых жителей 45% не работает ( пенсионеры, студенты, домохозяйки т.п.). Сколько взрослых жителей работает?
**№ 230 (1)**

В двух школах поселка было 1500 учащихся. Через год число учащихся первой школы увеличилось на 10%, а второй – на 20%, и в результате общее число стало равным 1720. Сколько учащихся было в каждой школе первоначально?

**№ 231 (1)**

В городской думе заседало 60 депутатов, представляющих две партии. После выборов число депутатов от первой партии увеличилось на 12%, а от второй – уменьшилось на 20%. Сколько депутатов от каждой партии оказалось в Думе после выборов, если всего было выбрано 56 депутатов?

**№ 228 (2)**

Два печника, работая вместе, могут сложить печь за 12 часов. Если первый печник будет работать 2 ч, а второй 3 ч, то они выполнят только 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?

**Учебно – тематический план**

| № занятия | Тема занятия | Практическое задание | Дата |
|---|---|---|---|
| 1 | Теоретический и исторический аспект понятия «арифметика». | № 3.1 – 3.4 | 4-09 |
| 2 | Умножение и деление на числа, близкие к «круглым». | № 3.5 – 3.8 | 11-09 |
| 3 – 4 | Применение основных свойств действий. | № 3.17 – 3.21 | 18,25-09 |
| 5 – 6 | Умножение и деление на степень пятёрки и степень двойки. | № 3.9 – 3.12 | 2,9-10 |
| 7 – 8 | Умножение и деление на 2,5; 1,25; 1,5; 0,75 с помощью обыкновенных дробей. | № 3.13 – 3.16 | 16,23-10 |
| 9 – 10 | Приёмы быстрого счёта с дробями. | № 3.28 – 3.31 | 30-10,13-11 |
| 11 | Нахождение значений выражений, содержащих степень. | № 3.22 – 3.27 | 20-11 |
| 12 – 13 | Применение формул сокращённого умножения. | № 3.12 – 3.16 | 27-11,4-12 |
| 14 – 15 | Вычисление квадратов. | № 3.32 – 3.35 | 11,18-12 |
| 16 – 17 | Итоговый тест по теме «Вычислительная арифметика». | Решение теста и анализ полученных результатов. | 25-12,15-01 |
| 18 – 20 | Проценты. Основные задачи на проценты | | 22,29-01,5-2 |
| 21 – 24 | Процентные расчеты в жизненных ситуациях (в том числе, задачи на формулы: простой процентный рост и сложный процентный рост) | | 12,19,26-02 4-03 |
| 25 – 27 | Задачи на смеси, сплавы и растворы | | 11,18,25-03 |
| 28 – 29 | Проценты в заданиях единого государственного экзамена | | 8,15-04 |
| 30 – 32 | Решение разнообразных задач по всему курсу | | 22,29-04, 6-05 |
| 33 – 34 | Заключительное занятие. Зачётная работа. Проект. | | 13,20-05 |
| Итого | | 34 | |

**Требования к уровню подготовки учащихся 7 класса**

***В результате изучения курса учащиеся должны:***

***понимать*** содержательный смысл термина «процент» как специального способа выражения доли величины, его роли в экономической и социальной жизни общества;

***знать:***

– как переводить на язык процентов такие речевые обороты как «увеличить число в 2,5 раза», «уменьшить на четверть» и т. д.;

– как делается обратный перевод;

– широту применения процентных вычислений в жизни, решать основные задачи на проценты, применять формулу простого процентного роста и формулу сложного процентного роста;

***уметь:***

– соотносить процент с соответствующей дробью (особенно в некоторых специальных случаях: 50 % – 1/2; 20 % – 1/5; 25 % – 1/4 и т. д.);

– производить прикидку и оценку результатов вычислений;

– при вычислениях сочетать устные и письменные приемы, применять калькулятор, использовать приёмы, рационализирующие вычисления.

**Литертура:**

**Литература для учителя.**

1. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. М., 1994.

2. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я. Контрольные и проверочные работы по алгебре. 7-9 кассы.: Метод. пособие. М.: Дрофа, 2004.

3. Зубелевич Г.И. под редакцией Сикорского К.П. Сборник задач московских математических олимпиад. М., 1971.

4. Иванов А.П. Систематизация знаний по математике в профильных классах с использованием тестов. – М.: Издательство «Физматкнига», 2004.

5. Иванов А.П. Тесты для систематизации знаний по математике (7 класс): Учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2002.

6. Иванов А.П. Тесты для систематизации знаний по математике (8 класс): Учеб. пособие. 2-еизд., перераб. и доп. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2003.

7. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. М., 1990

8. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. Алгебра для 7 класса с углублённым изучением математики. М.: Мнемозина, 2003.

9. Сергеев И.Н., Олехнин С.Н., Гашков С.Б. «Примени математику». М., 1989.

10. Система тренировочных задач и упражнений по математике. М., 1991.

Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Э 68 Савин А.П. – М.: Педагогика, 1985.

11. Математика. 8 – 9 классы: сборник элективных курсов // Студенецкая В.Н., Сагателова Л.С.- Волгоград: Учитель, 2007. - 205с.

12. Алгебра в 7 классе: методические материалы //Никольский С. Н., Потапов М. К., Решетников Н. Н.. - М: Просвещение, 2002.

13. Барабанов О. О. Задачи на проценты как проблемы словоупотребления // Математика в школе. - 2003 - № 5. – С. 50-59 4. Решение задач на смеси, растворы и сплавы методом уравнений // Водинчар М. И., Лайкова Г. А., Рябова Ю. К. Математика в школе. - 2001. - № 4.

14. ЕГЭ. Математика: Экспресс – подготовка // Виноградова Т.М, Лысикова И.В., Рогатин И.В., Третьяк И.В.-М. : Эксмо, 2011. – 240с.

15. Процентные вычисления. 10 -11 классы: учеб.-метод, пособие //Дорофеев Г. В., Седова Е. А. - М.: Дрофа, 2003.

**Литература для учащихся.**

1. За страницами учебника математики // Виленкин Н. Л. - М.: Просвещение, 1989. - С. 73.

2. Математика 6 // Виленкин Н. Л., Жохов В. И., Чесноков А. С, Шварцбурд С. И. - М.: Дрофа, 2000.

3. ЕГЭ. Математика: Экспресс – подготовка // Виноградова Т.М, Лысикова И.В., Рогатин И.В., Третьяк И.В.-М. : Эксмо, 2011. – 240с.
4. ЕГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л.Семёнова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2013 г. -192с. - (ФИПИ – школе)
5. Решение задач и выполнение заданий с комментариями, ответами для подготовки к единому государственному экзамену: в 2 ч. - Ч. II / сост. В. Н. Студенецкая, 3. С. Гребнева - Волгоград: Учителъ, 2003. - 104с. 6. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. - М.: Высшая школа, 2006.

**Интернет –источники**

http://www.mathege.ru
http://uztest.ru/
http://nsportal.ru/
www.MatBuro.ru/

**Тематика возможных проектных (творческих, исследовательских) работ учащихся**

**1. Проценты на уроках…**

Учащимся предстоит выяснить, какие задачи «на проценты», и на каких предметах они решают. Учащимися проводится самостоятельная исследовательская работа, в ходе выполнения которой учащиеся выясняют, как используется понятие процентов при изучении других дисциплин? Результаты работы обсуждаются совместно, дополняются.

При изучении этого вопроса рассматривается использование процентов на уроках химии, физики, географии. В восьмом классе учащиеся начали изучать химию. Химия тесно связана с математикой, т.к. при решении химических задач необходимо знание процентов, умение составлять пропорции. Поэтому одной из таких работ может быть проект «Проценты на уроках химии».

**2. Кредит, ссуда или сберегательный вклад?**

Понятие процентов и их роли в повседневной жизни. В этом проекте учащимся предстоит:

- определить какую крупную вещь вы решили приобрести;
- желательно познакомиться с правами и обязанностями потребителя (покупателя) и определить, что необходимо для того, чтобы стать грамотным покупателем;
- изучить типы соответствующих магазинов в вашей местности, исследовать цены и ассортимент интересующих вас товаров;
- определить максимально подходящий магазин для покупки, запланированной вещи;
- выяснить (собрать) предложения
    1. различных магазинов (цена товара, первый взнос, проценты по кредиту)
    2. банков по ссудам (виды кредитов, проценты, сроки, условия)
    3. банков по вкладам (процентные ставки, виды вкладов, сроки)
    4. кредитных отделов (первый взнос, проценты, сроки возврата кредита);
- выполнить расчеты, оформить результаты (таблицы, схемы, графики, диаграммы);
- проанализировать полученные результаты, выбрать наиболее выгодные предложения.

**3. Профессия + проценты.**

В этом проекте учащимся предстоит:

- изучить интересные и престижные профессии,
- выделить те группы профессий, в которых необходимы знания о процентах;
- детально изучить несколько профессий,
- создать базу данных (включающую название профессии, диапазон заработной платы, необходимые навыки образования и работы, учебные заведения в которых можно получить необходимое образование, какие школьные предметы требуются на вступительных экзаменах, предполагаемое место работы, должностные обязанности, и т.п.)

4. **«Алгоритмы быстрого счета»** охватывает тему «Нестандартные формы вычисления», используемые во внеурочной деятельности, за пределами школьной программы.

- В проекте на основании проведения обзора литературы, информации сети интернет, анкетирования учащихся провести работу по изучению разнообразных форм алгоритмов быстрого счета.
- Оформить презентацию «Алгоритмы быстрого счета», оформить каталог – справочник, провести общественную презентацию проекта.
- «Математику уже за то любить следует, что она ум в порядок приводит» Михаил Ломоносов
- Актуальность: Данная работа актуальна так как, большинство учащихся имеют недостаточно знаний о нестандартных приемах формирования вычислительных навыков.
- Умение считать в уме остается полезным навыком и для современного человека, несмотря на то, что он владеет всевозможными устройствами, способными считать за него. Возможность обходиться без микрокалькулятора и в нужный момент оперативно решить поставленную арифметическую задачу – это не единственное применение данного навыка.
- Практическое применение: использование алгоритмов быстрого счета при сдаче ГИА и ЕГЭ.

**Учебно - методическое обеспечение программы**

- специальная справочная литература;
- методическая литература:
- дидактический и раздаточный материал;
- набор КИМов ЕГЭ прошлых лет:
- желательно наличие компьютеров дома у учащихся.
- наличие программы курса.